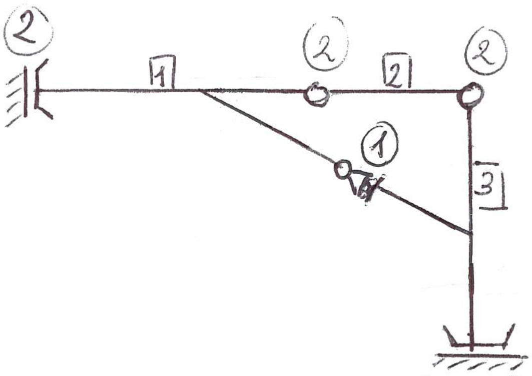
ESERCIZIO 3

$\begin{cases} g.d.l. = 3 \times 3 = 9 \\ g.d.v. = 9 \text{ (2 numeri cerchiati in figura)} \end{cases}$

$\boxed{ISO} \rightarrow$ LABILE?

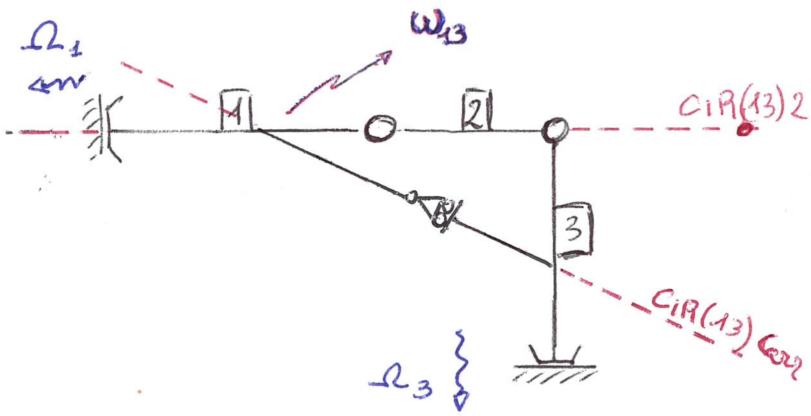


[4 g.d.v. a terra
⇓
NO separazione analisi interna e a terra]

• Le aste [1] [2] e [3] costituiscono un quadrilatero articolato equivalente: aste [1] e [3] vincolate a terra da vincoli doppi e collegate tra di loro da una biella (asta con vincoli doppi relativi alle estremità) e un carrello relativo (equivalente a biella).

• Si tratta dunque di verificare se il quadrilatero può essere ricondotto ad un arco a tre cerniere ben posto.

• La biella [2] e il carrello permettono rotazioni relative tra le aste [1] e [3] attorno a C.I.R. posti sulle rette denominate CIR (13) 2 e CIR (13) carr., rispettivamente (vedi figura).

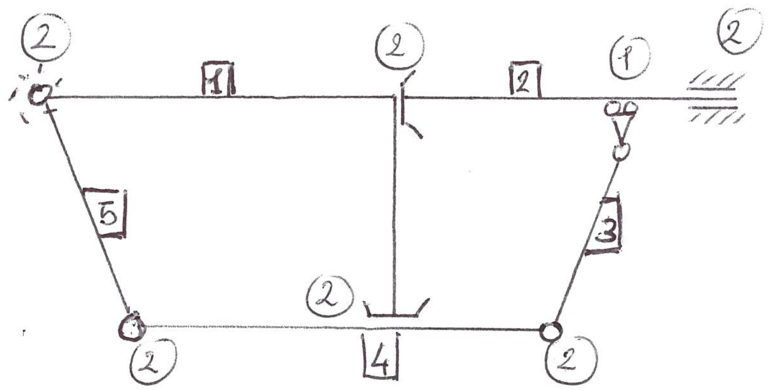


La retta CIR(13)2 è il luogo dei punti che sono le combinazioni lineari dei centri di rotazione relativi permessi dai vincoli doppi alle estremità della biella.

• L'intersezione delle rette CIR (13) 2 e CIR (13) carr è quindi l'unico punto attorno al quale è possibile una rotazione relativa tra asta [1] e asta [3]. Chiamiamo il punto ω_{13}.

- Analizziamo ora l'arco a tre cerniere equivalente alla struttura originaria: la cerniera relativa è costituita dal punto ω_{13}. Le aste $\boxed{1}$ e $\boxed{3}$ possono ruotare rispetto al sistema di riferimento a terra (rotazioni assolute) attorno ai punti a ∞ Ω_1 e Ω_3, rispettivamente. Le tre cerniere (Ω_1, Ω_3 e ω_{13}) NON sono allineate $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON LABILE}}$

ESERCIZIO 3

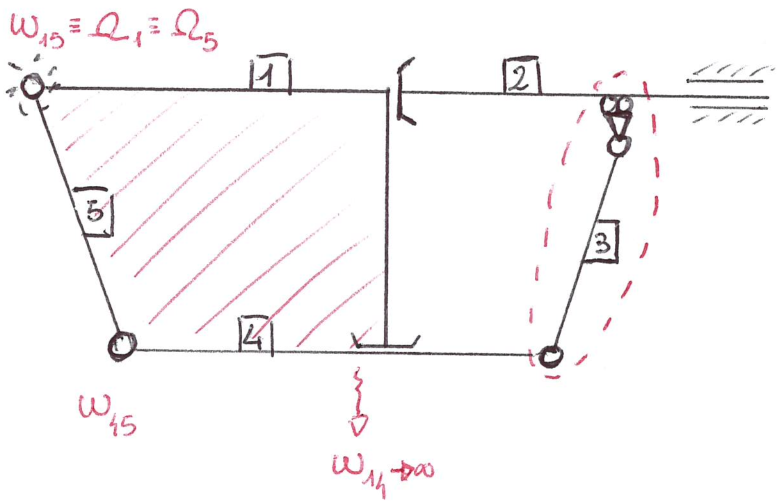


$$\begin{cases} g.d.l. = 3 \times 5 = 15 \\ g.d.v. = 15 \ (\Sigma \text{ numeri cerchiati in figura}). \end{cases}$$

$\boxed{ISO} \longrightarrow$ LABILE?

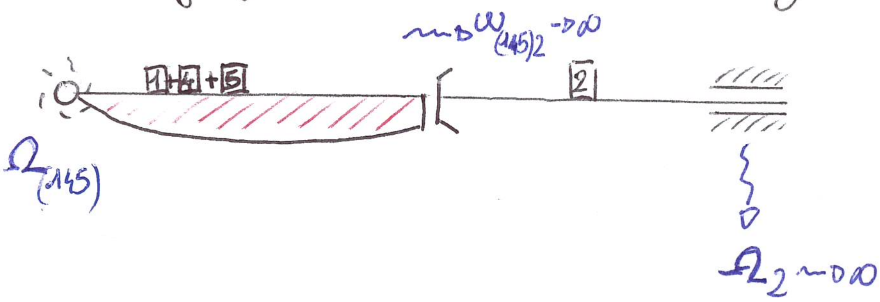
- 4 g.d.v a terra ⇒ NO separazione analisi interno e a terra.

- Conviene cominciare l'analisi dagli anelli chiusi. Consideriamo l'anello formato dalle aste $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ e $\boxed{5}$. Si tratta di un triangolo isostatico (tre aste collegate tra loro da vincoli doppi). Il triangolo non è labile in quanto le tre cerniere relative che collegano le aste non sono allineate (punti ω_{15}, ω_{45} e ω_{14} in figura) ⇒ il triangolo isostatico non è labile e può essere considerato una superasta.



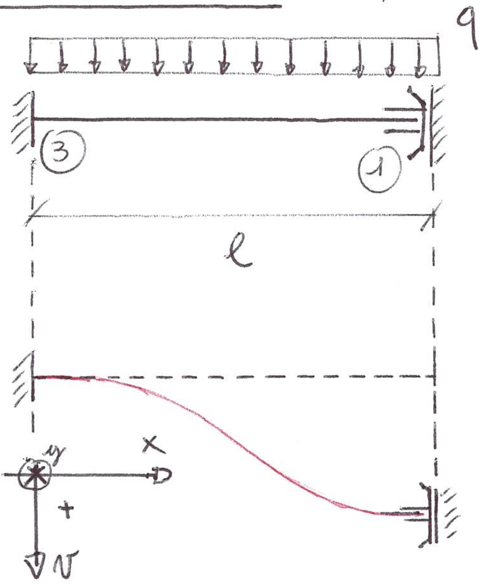
- L'asta $\boxed{3}$ è un'appendice isostatica del tipo "cerniera-carrello", con vincoli ben posti ⇒ non labile. Come tale, la sua presenza non influisce sulla cinematica della struttura a cui è connessa ⇒ la posso ignorare nell'analisi.

- La struttura può a questo punto essere semplificata come nella figura:



- La struttura è dunque equivalente ad un arco a tre cerniere ($\Omega_{(145)}$, Ω_2, $\omega_{(145)2}$): $\Omega_{(145)}$ è il centro di istantanea rotazione assoluto della superasta $\boxed{145}$; Ω_2 è il C.I.R assoluto dell'asta $\boxed{2}$, posto a ∞ in direzione verticale; $\omega_{(145)2}$ è il C.I.R. relativo tra superasta $\boxed{145}$ - asta $\boxed{2}$, posto a ∞ in direzione orizzontale $\Rightarrow$ le tre cerniere NON sono allineate $\Rightarrow$ la struttura NON è labile.

ESERCIZIO 1



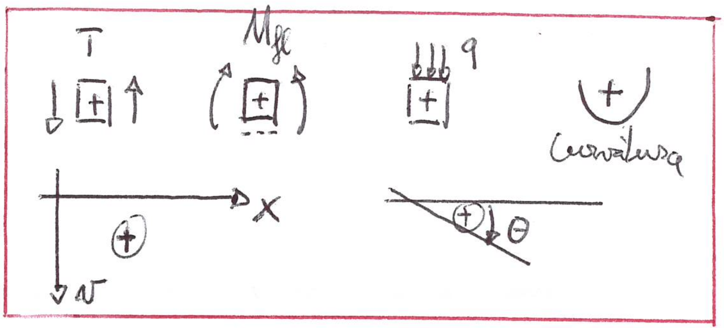
$$\begin{cases} g.d.l. = 3 \times 1 = 3 \\ g.d.v. = 4 \text{ (Σ numeri cerchiati in figura)} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{IPERSTATICA}}$

1) Deformata qualitativa (vedi figura)

2) Convenzioni linea elastica:



- La struttura è iperstatica, quindi è necessario ricorrere al metodo della derivata quarta dello spostamento v per calcolare la deformata.

- $$\frac{d^4 v}{dx} = \frac{q}{EJ}$$

$$\begin{cases} E = \text{Modulo di Young del materiale} \\ J = \text{Momento di inerzia baricentrico sezione rispetto all'asse } y \text{ in figura} \end{cases}$$

- Per integrazioni successive si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{d^3 v}{dx} = \dfrac{qx}{EJ} + A \\[2mm] \dfrac{d^2 v}{dx} = \dfrac{qx^2}{2EJ} + Ax + B \\[2mm] \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{qx^3}{6EJ} + \dfrac{Ax^2}{2} + Bx + C \\[2mm] v = \dfrac{qx^4}{24EJ} + A\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{Bx^2}{2} + Cx + D \end{cases}$$

- Le costanti di integrazione A, B, C e D possono essere identificate scrivendo le opportune <u>condizioni al contorno</u> per lo spostamento $v(x)$ e le sue derivate.

√ Prendiamo in considerazione l'<u>incastro in $x=0$</u>:

$$\begin{cases} v(x=0)=0 & (1) \rightarrow \text{[Spostamento non permesso da incastro]} \\ v'(x=0)=0 & (2) \rightarrow \text{[Rotazione non permessa da incastro]} \end{cases}$$

√ Prendiamo in considerazione il <u>bipattino in $x=l$</u>:

$$\begin{cases} v'(x=l)=0 & (3) \rightarrow \text{[Rotazione non permessa da bipattino]} \\ v'''(x=l)=0 & (4) \end{cases}$$

(4) → [Ricordando che $T(x)=v'''(x)\cdot EJ$, ed il bipattino, in assenza di carichi concentrati è tale per cui $T(x=l)=0$]

$\Downarrow$

(4) → $\boxed{-\dfrac{ql}{EJ}=A}$

(1) → $\boxed{D=0}$

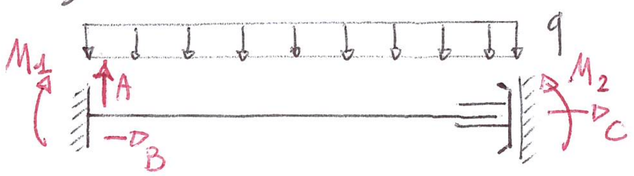
(2) → $\boxed{C=0}$

(3) → $\dfrac{ql^3}{6EJ}-\dfrac{ql^3}{2EJ}+Bl=0 \Rightarrow \boxed{B=\dfrac{ql^2}{3EJ}}$

$\Downarrow$

$$\boxed{v(x)=\frac{qx^4}{24EJ}-\frac{qlx^3}{6EJ}+\frac{ql^2x^2}{6EJ}}$$ [EQ. LINEA ELASTICA]

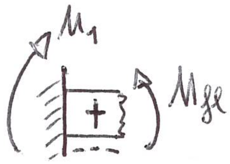
3) Reazioni vincolari



$$\begin{cases} \boxed{B = C = \emptyset} \\ \boxed{A = q \cdot l} \\ -M_1 + M_2 - \frac{ql^2}{2} = \emptyset \end{cases}$$

$\boxed{M_1} \Rightarrow M_{fl}(x) = -\frac{d^2 v}{dx^2} \cdot EJ = -EJ \left[\frac{qx^2}{2EJ} - \frac{qlx}{EJ} + \frac{ql^2}{3EJ} \right]$

$M_1 = M_{fl}(x=0) \Leftrightarrow$



[PRIMO CONCIO A SINISTRA]

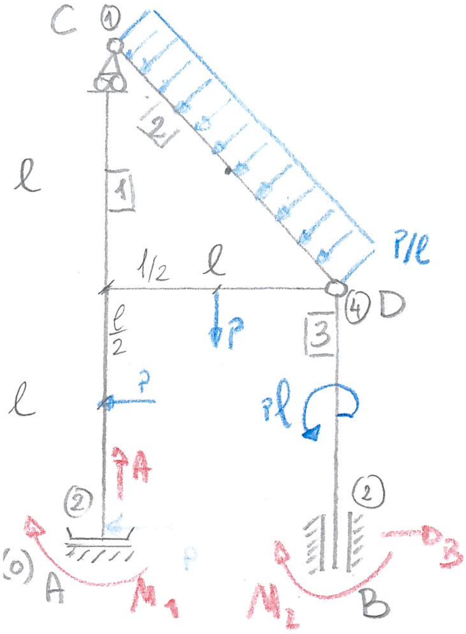
$\Downarrow$

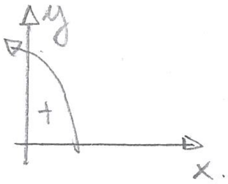
$$\boxed{M_1 = -\frac{ql^2}{3}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{M_2 = M_1 + \frac{ql^2}{2} = +\frac{ql^2}{6}}$$

ESERCIZIO (2)





• Analisi cinematica:

√ $\begin{cases} g.d.l. = 3 \times 3 = 9 \\ g.d.v. = 9 \end{cases} \rightarrow$ ISO

√ aste $\boxed{1}$ e $\boxed{3}$ = arco a 3 cerniere non allineate → isostatico.

√ Asta $\boxed{2}$ = appendice isostatica (cerniera + carrello ben posti).

$\boxed{\text{NON LABILE}}$

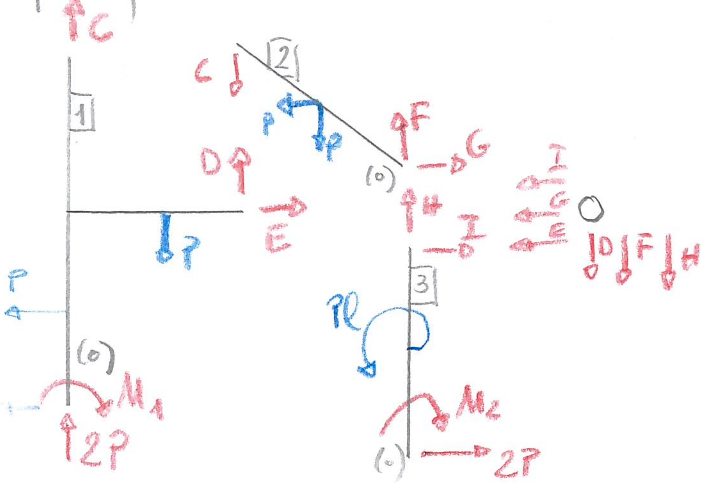
A) REAZIONI VINCOLARI

(Comincio a scrivere equazioni di equilibrio statico per l'intera struttura:

$$\begin{array}{l} x \\ y \\ (0) \end{array} \begin{cases} B + P - \frac{P}{\ell}\cdot(\ell\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{B = 2P} \\ A - P/\ell\cdot(\ell\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - P = 0 \Rightarrow \boxed{A = 2P} \\ P\ell - M_1 - M_2 + \frac{3}{2}P\ell - \frac{P\ell}{2} - \cancel{\frac{P\ell}{2}} + \cancel{\frac{P\ell}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$(M_1 + M_2) = 2P\ell$$

• Per trovare reazioni a terra mancanti (M_1 e M_2) e tutte quelle interne, sferzo la struttura. Attenzione: sul nodo D convergono 3 aste (quindi 3 diverse forze di reazione) ⇒ devo scrivere eq. equilibrio al nodo:



Asta $\boxed{1}$:

$$\begin{array}{l} x \\ y \\ (0) \end{array} \begin{cases} \boxed{E = P} \\ 2P + C + D - P = 0 \\ -M_1 + D\ell - E\ell - \cancel{\frac{P\ell}{2}} + \cancel{\frac{P\ell}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$M_1 = D\ell - P\ell$$

Asta $\boxed{2}$:

$$\begin{cases} x & \boxed{G = P} \\ y & F - C - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 0} \\ (0) & P \cdot \frac{l}{2} + P \cdot \frac{l}{2} + C \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = -P} \end{cases}$$

Nodo:

$$\begin{cases} x & -(G+E+I) = 0 \quad \Rightarrow \quad P + P + I = 0 \quad \boxed{I = -2P} \\ y & -(D+F+H) = 0 \quad \qquad D + H = 0 \end{cases}$$

Asta $\boxed{3}$:

$$\begin{cases} x & 2P + I = 0 \\ y & H = 0 \\ (0) & -M_2 + Pl - Il = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2 = 3Pl} \end{cases}$$

Da precedenti:

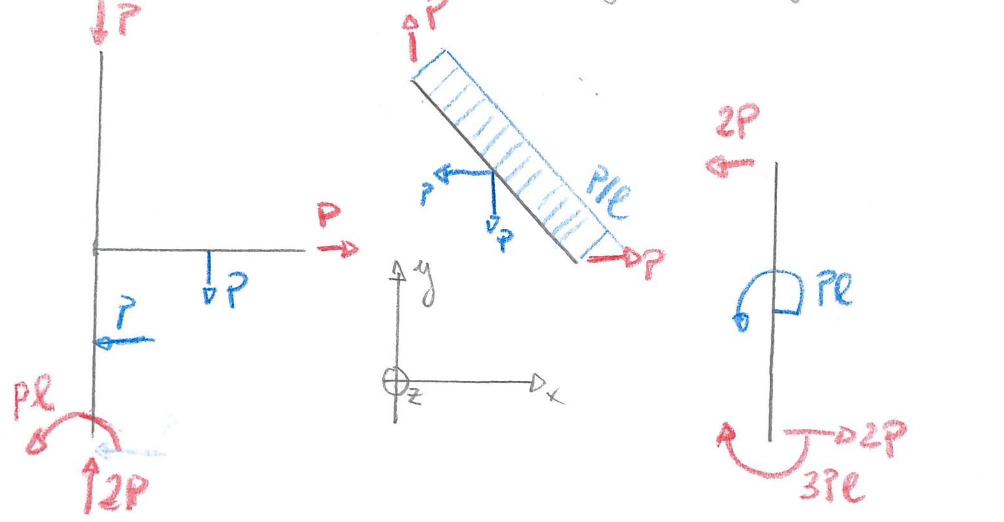
$$M_1 + M_2 = 2pl \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1 = -pl}$$

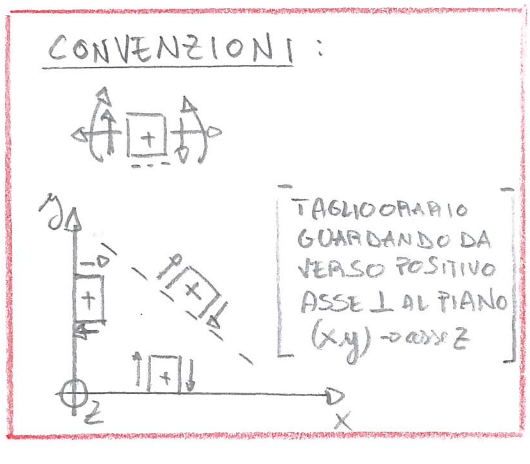
$$M_1 = Dl - pl \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 0}$$

$$D + H = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = 0}$$

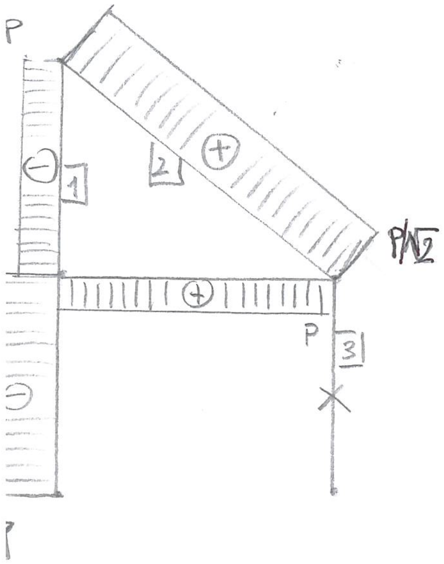
3) AZIONI INTERNE

Ridisegnamo la struttura evidenziando tutte le reazioni interne ed esterne identificate al punto A) + carichi esterni

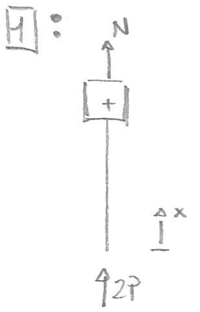




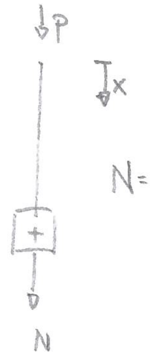
AZIONE ASSIALE [N]



[1] :

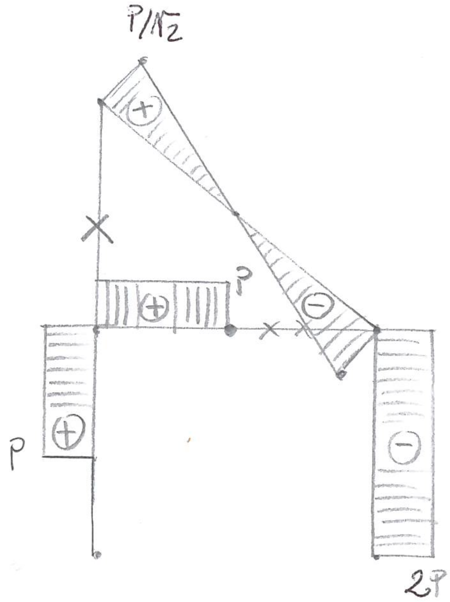


$N = -2P$

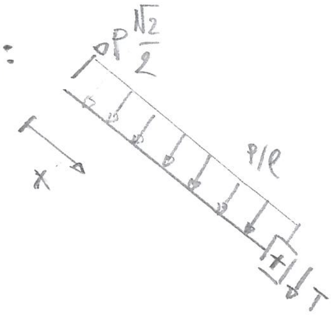


$N = -P$

AZIONE TAGLIANTE [T]



[2] :



$T + \frac{P}{l}x - P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$T = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{l}\right)$

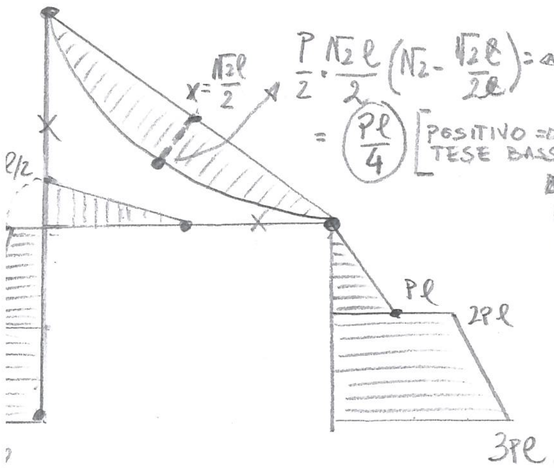
$\Downarrow$

Lineare

$x = 0 \quad T = \frac{\sqrt{2}}{2}P$

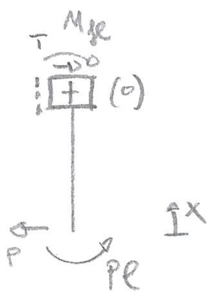
$x = l\sqrt{2} \quad T = -\frac{\sqrt{2}}{2}P$

MOMENTO FLETTENTE [M_{fl}]



$\frac{P}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}l}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}l}{2l}\right) = \boxed{\frac{Pl}{4}}$ [POSITIVO ⇒ FIBRE TESE BASSE!]

[1] :



$Pl - Px - M_{fl} = 0$

$M_{fl} = P(l - x)$

$\Downarrow$

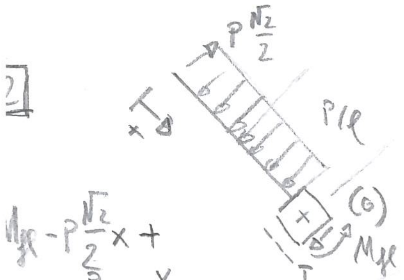
Lineare

$x = 0 \quad M_{fl} = +Pl$

$x = l/2 \quad M_{fl} = +\frac{1}{2}Pl$

[fibre tese dalla parte della convenzione positiva]

[2]



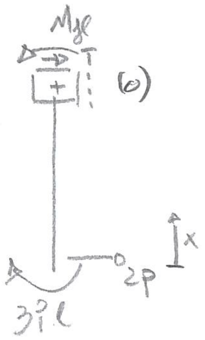
$M_{fl} - P\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{P}{l}\cdot x\cdot\frac{x}{2} = 0$

$M_{fl} = \frac{P}{2}x\left(\sqrt{2} - \frac{x}{l}\right) \rightarrow$ Parabolico

$x = 0 \quad M_{fl} = 0$

$x = l\sqrt{2} \quad M_{fl} = 0$

[3] :



$2P\cdot x - 3Pl + M_{fl} = 0$

$M_{fl} = P(3l - 2x)$

$\Downarrow$

Lineare

$x = 0 \quad M_{fl} = 3Pl$

$x = l/2 \quad M_{fl} = 2Pl$