4 CM - Esercizio 4

4.1 Calcolo dello spessore della piastra

Reazioni vincolari:
$R_A = R_B = \frac{p \cdot l}{2}$

Andamento del momento:
$M(x) = R_A \cdot x - p \cdot x^2/2$

Quindi l'andamento della derivata seconda della deformata:
$w''(x) = \frac{p \cdot x^2/2 - R_A \cdot x}{E \cdot I}$

Quindi l'andamento della derivata prima della deformata:
$w'(x) = \frac{p}{2 \cdot E \cdot I}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{l \cdot x^2}{2}\right) + c_1$

Quindi l'andamento della deformata:
$w(x) = \frac{p}{2 \cdot E \cdot I}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{l \cdot x^3}{6}\right) + c_1 \cdot x + c_2$

Con le condizioni al contorno $\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(a) = 0 \end{cases}$, si ottiene $\begin{cases} c_1 = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \\ c_2 = 0 \end{cases}$, per cui l'andamento finale é:
$w(x) = \frac{p}{24 \cdot E \cdot I}\left(x^4 - 2 \cdot x^3 \cdot l + x \cdot l^3\right)$

Lo spostamento massimo si registra nel punto per $x = l/2$, e vale:
$w_{max} = w(l/2) = \frac{5}{384}\frac{p \cdot l^4}{E \cdot I}$

Imponendo $w_{max} \leq 1$, e considerando $I = \frac{h \cdot b}{12}$, si ottiene:
$h \geq \sqrt[3]{\frac{5}{32}\frac{p \cdot l^4}{E}}$ da cui $h \geq 24.96$, e quindi si sceglie $h = 25mm$

4.2 Calcolo a fatica degli alberi

Nel unto di contatto ruota-cremagliera i due corpi si scambiano una forza tangenziale e una radiale: $\begin{cases} F_T = R_A = 5625N \\ F_R = R_A \cdot \tan\left[20^O\right] = 2047N \end{cases}$

Questo significa che l'albero é interamente sollecitato a momento torcente M_t pari a $F_T \cdot r_p$, e ad un momento flettente M_f crescente che raggiunge il massimo in corrispondenza dei cuscinetti del motore, dove vale $F_R \cdot L$.
Data la natura alternata e limitata del movimento, i punti più sollecitati sono sottoposti ad azioni torcenti e flettenti con componente media e alternata:

$\begin{cases} \sigma_a = \sigma_m = M_f/W_f/2 \\ \tau_a = \tau_m = M_t/W_t/2 \end{cases}$, dove $W_f = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ e $W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

Sostituendo i valori si ottiene: $\begin{cases} \sigma_a = \sigma_m = \frac{1.09*10^{12}}{d^6} \\ \tau_a = \tau_m = \frac{1.15*10^{12}}{d^6} \end{cases}$

Il calcolo del diametro dell'albero necessario a garantire vita infinita viene fatto mediante la formula di Gaugh Pollard:
$\sigma_{GP} = \sqrt{\sigma_a^2 + H^2 \cdot \tau_a^2} \leq \sigma'_f(R)$, dove:

- $H = \frac{\sigma'_f(R)}{\tau'_{fa,f}}$
- $\tau'_{fa} = \frac{0.29 \cdot R_m \cdot b_2 \cdot b_3}{K_f}$
- $\sigma'_f(R)$ si trova calcolando l'intersezione della retta di lavoro $\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_r} = 1\right)$ con quella limite per materiali duttili $\left(\frac{\sigma_a}{\sigma'_{fa,f}} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_{sn}}\right)$. Si ottiene $\sigma'_f(R) = \frac{\sigma'_{fa,f}}{1 + \frac{\sigma'_{fa,f}}{R_{sn}}}$
- $\sigma'_{fa,f} = \frac{0.5 \cdot R_m \cdot b_2 \cdot b_3}{K_f}$

Sostituendo i valori si ottiene:

- $\sigma'_{fa,f} = 162 MPa$
- $\tau'_{fa} = 94 MPa$
- $\sigma'_f(R) = 137 MPa$

Sostituendo questi ultimi nell'equazione di GP, nella quale l'unico termine incognito é il diametro dell'albero, si ottiene:
$\frac{1.88 \cdot 10^6}{d^3} \leq 137 \rightarrow d \geq 23.9 mm$
Se si volesse considerare un coefficiente di sicurezza, questo andrebbe considerato in $\sigma'_f(R)$ e τ'_{fa}. Ipotizzando un $SF = 2$, si ottiene: $\sigma'_f(R) = 68.6 MPa$ e $\tau'_{fa} = 47 MPa$, da cui:
$\frac{1.88 \cdot 10^6}{d^3} \leq 68.6 \rightarrow d \geq 30.2 mm$

5 Esercizio 5

5.1 Tensioni principali

Il tensore delle tensioni ha la forma: $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le tensioni principali si trovano eguagliando a 0 il determinante della matrice: $\begin{vmatrix} 10 - \sigma_P & 10 & 10 \\ 10 & -\sigma_P & 0 \\ 10 & 0 & -\sigma_P \end{vmatrix}$.

Si ottiene quindi l'equazione: $\sigma_P^3 - 10 \cdot \sigma_P^2 - 200 \cdot \sigma_P = 0$, da cui le tre tensioni principali:

$$\begin{cases} \sigma_I = 20 \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = -10 \end{cases} .$$

5.2 Direzioni principali

Per le direzioni principali si devono risolvere i tre sistemi di equazioni ottenuti utilizzando 2 di 3 equazioni dal sistema:

$$\left(\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_i \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{con } i = I, II, III$$

Oltre all'equazione caratteristica del versore: $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$
In particolare:

- Direzione I:

$$\begin{cases} (10 - \sigma_I) \cdot n_{x,I} + 10 \cdot n_{y,I} + 10 \cdot n_{z,I} = 0 \\ 10 \cdot n_{x,I} - \sigma_I \cdot n_{y,I} = 0 \\ n_{x,I}^2 + n_{y,I}^2 + n_{z,I}^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_{x,I} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ n_{y,I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ n_{z,I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} n_{x,I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ n_{y,I} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ n_{z,I} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

- Direzione II:

$$\begin{cases} (10 - \sigma_{II}) \cdot n_{x,II} + 10 \cdot n_{y,II} + 10 \cdot n_{z,II} = 0 \\ 10 \cdot n_{x,II} - \sigma_{II} \cdot n_{z,II} = 0 \\ n_{x,II}^2 + n_{y,II}^2 + n_{z,II}^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_{x,II} = 0 \\ n_{y,II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_{z,II} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} n_{x,II} = 0 \\ n_{y,II} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_{z,II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

- Direzione III:

$$\begin{cases} 10 \cdot n_{x,III} - \sigma_{III} \cdot n_{y,III} = 0 \\ 10 \cdot n_{x,III} - \sigma_{III} \cdot n_{z,III} = 0 \\ n_{x,III}^2 + n_{y,III}^2 + n_{z,III}^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_{x,III} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ n_{y,III} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ n_{z,III} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} n_{x,III} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ n_{y,III} = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ n_{z,III} = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

5.3 σ_{VM} e τ_{Max}

$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{III}} = 26.5MPa$
$\tau_{Max} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2} = 15MPa$